# Método Probabilístico

grafo G

- Uma k-coloração de vértices de um grafo G é uma função $c: V(G) \to [k]$

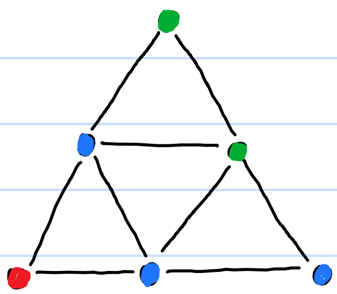
  Esses números representam cores, por isso chamamos esse conj de conj. de cores

- Uma coloração de vértices é uma k-coloração de vértices p/ algum k

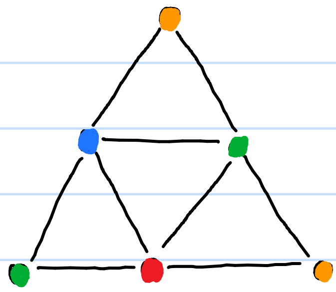
- Uma (k-)coloração de vértices $c: V(G) \to [k]$ é própria se
$$c(u) \neq c(v)$$
  para toda aresta $uv \in E(G)$.

- O número cromático de um grafo G, denotado por $\chi(G)$, é o menor k para o qual G admite uma k-coloração própria.

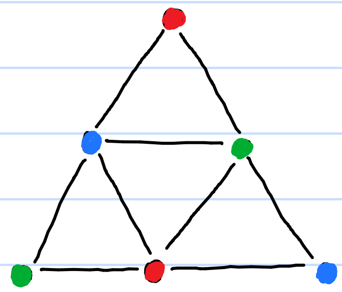
- Uma coloração $c: V(G) \to [k]$ é mínima se $\chi(G) = k$



3- coloração
(ñ é propria)



4 - coloração
própria



3 - coloração
própria.
É coloração mínima.

- É fácil perceber que $\chi(G) \geq \omega(G)$

  o maior tamanho de uma clique em G.

Pergunta: Existem grafos livres de triângulos com número cromático arbitrariamente grande?

↳ Esse problema atraiu muitos matemáticos

- O problema anterior foi proposto por Blanche Descartes

  ⇒ Varios dos problemas em combinatória envolvem construir objetos com certas propriedades específicas

  ⇒ isso pode ser difícil e requerer muita criatividade

- Erdős e Rényi resolveram inúmeros desses problemas simplesmente pegando um objeto aleatório dentro de uma coleção grande de objetos e mostrando que com probabilidade positiva esse objeto terá as propriedades que desejamos.
  - Eles foram responsáveis por introduzir o método Probabilístico.
  - Hoje esse método consiste de diversas ferramentas e paradigmas.

## Fundamentos

- Um espaço probabilístico é um par $(\Omega, \mathbb{P})$, onde $\Omega$ é um conj. finito chamado de espaço amostral. A distribuição / função massa de probabilidade é uma função $\mathbb{P} : \Omega \to [0,1]$ tal que $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$.

  imagine que você está distribuindo 1 kg de massa para o elementos de $\Omega$

  - O espaço amostral é gerado por um experimento, que é um procedimento que gera um conj. de resultados possíveis.
- Um conj. $A \subseteq \Omega$ é chamado de evento

- Definimos a probabilidade de um evento $A$ como sendo

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$$

- Um evento $A$ tal que $|A| = 1$ é chamado de evento elementar.

- Quando conveniente, tratamos $\omega \in \Omega$ como sendo o evento $\{\omega\}$
- O evento complementar de um evento $A$, denotado por $\bar{A}$, é $\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$

## Exemplo

- Imagine o experimento no qual rolamos dois dados
- Espaço amostral: $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}$
- Assumindo que os dados eram honestos e que cada valor é equiprovável, podemos assumir que cada resultado tem a mesma chance de ser sorteado. Portanto podemos definir que a função de probabilidade como

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} = 0.2\bar{7}$$

- Seja $A$ o evento de tirar 7 nos dados
- Logo $A = \{\omega \in \Omega : \underbrace{\omega[1] + \omega[2]}_{\text{a soma dos dados é 7}} = 7\}$

$$= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(1,6)\}$$

- Probabilidade de tirar 7 nos dados

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = 0.1\bar{6}$$

**Propriedades.** As seguintes propriedades valem para todo espaço de probabilidades $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. Para todo $A \subseteq \Omega$, temos $\mathbb{P}(\Omega \setminus A) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. (monotonicidade) Se $A \subseteq B \subseteq \Omega$, então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. (Inclusão-Exclusão) Para todo $A, B \subseteq \Omega$, temos
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$
4. (cota da união) Para todo $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq \Omega$, temos
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i).$$

- Uma distribuição $\mathbb{P}$ é dita uniforme sobre $\Omega$ se, para cada $\omega \in \Omega$, temos que $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$

  - Neste caso, temos que $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ para todo $A \subseteq \Omega$.

- Dado um conj. $\Omega$, dizemos que um elemento é escolhido uniformemente ao acaso quando tal escolha é feita de acordo com a distribuição uniforme sobre $\Omega$.

- Dois eventos $A$ e $B$ são independentes se

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

- Dizemos que $n \geq 2$ eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são dois a dois independentes se todo par de eventos $A_i$ e $A_j$, com $1 \leq i < j \leq n$, forem independentes. Ademais, dizemos que tais eventos são mutuamente independentes se para toda subcoleção de eventos $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, com $k \leq n$ e $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, temos que

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

__Exemplo__: considere o experimento no qual rolamos um dado de 6 lados. Assim, nosso espaço amostral consiste nos resultados possíveis do sorteio, isso é,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Agora, assuma que nosso dado é justo, ou seja, $\mathbb{P}(\omega) = 1/6$ para todo $\omega \in \Omega$.
- Seja $A$ o evento de obter um número ímpar

$$A = \{1, 3, 5\}$$

- Note que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 1/6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- Seja $B$ o evento de obter um número primo

$$B = \{2, 3, 5\} = \frac{3}{6} = 1/2$$

- Seja $C$ o evento de obter um número primo que é ímpar

$$C = \{3, 5\}$$

- Note que $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3$

$\Longrightarrow$

• Note que os eventos A e B são dependentes, pois,

$$\mathbb{P}(A\cap B) = 1/3 \neq 1/4 = \frac{1}{2}\cdot 1/2 = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

• Seja D o evento do resultado do sorteio ser um número menor que 3

$$D = \{1, 2\}$$

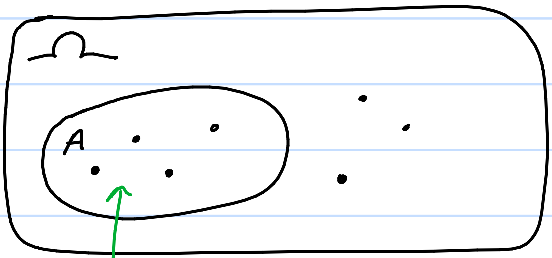
• Note que $\mathbb{P}(D) = 2/6 = 1/3$

• Ademais, note que A e D são independentes, pois

$$\mathbb{P}(A\cap D) = 1/6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(D)$$

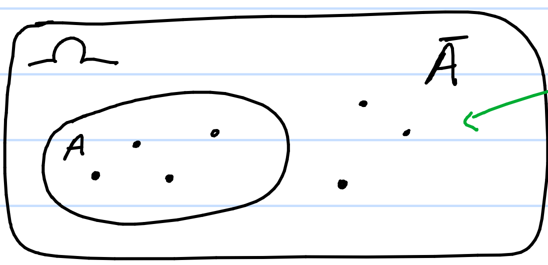
## Prova Probabilística

• Se um evento ocorre com probabilidade positiva, então tal evento é não vazio




Se quando você soma a "massinha" recebida pelos elementos em A e esse valor dá positivo, significa que $A \neq \emptyset$

• Se a probabilidade do evento n̄ ocorrer é estritamente menor do que 1, então a prob. do evento ocorrer é positiva e, logo, tal evento é n̄ vazio.




Se você somar a "massinha" dos elementos em $\bar{A}$ e isso der menos de "1 kg", então é porque tem um elemento com massinha em $\bar{\bar{A}} = A$

- A dificuldade em uma prova probabilística reside em determinar um espaço de probabilidades adequado (e fazer as contas :) ).

**Teorema (Erdős, 47)** Para todo $k \geq 3$ inteiro, temos $R(k) > 2^{k/2}$.

*Demonstração*

- Seja $n = 2^{k/2}$.
- Mostraremos que existe uma 2-coloração das arestas de $K_n$ sem cliques monocromáticas de tamanho $k$.
- Pinte cada aresta do $K_n$ de azul ou vermelho de forma aleatória e independente com probabilidade $1/2$.
- Para cada clique $A \subseteq V(K_n)$ com $k$ vértices, temos que a probabilidade de $A$ ser monocromática vermelha é $2^{-\binom{k}{2}}$
- Analogamente, a probabilidade de $A$ ser monocromática azul é $2^{-\binom{k}{2}}$
- Pela cota da união, temos que a probabilidade de $A$ ser uma clique monocromática é no máximo $2^{1-\binom{k}{2}}$
- Novamente, pela cota da união, a probabilidade de existir tal clique monocromática é no máximo

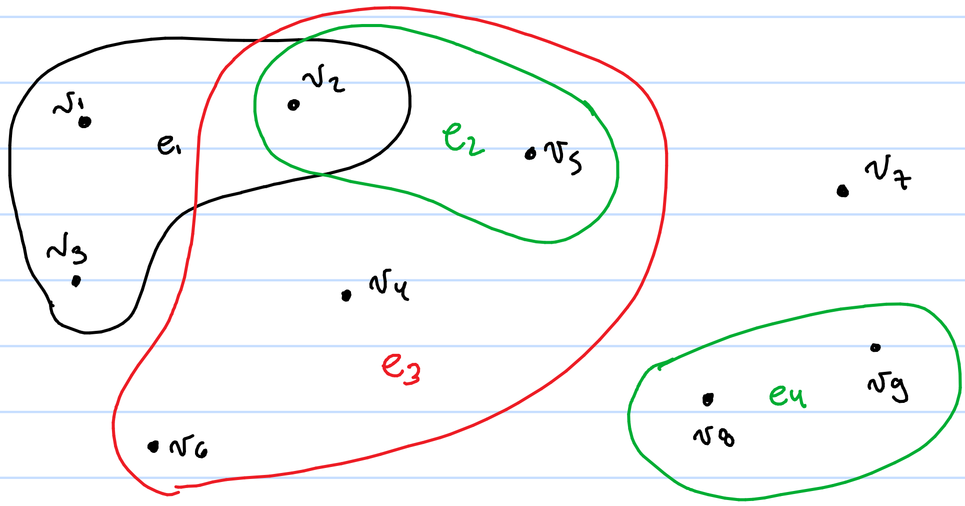
$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{(2^{k/2})^k}{k!} \cdot 2^{1-\frac{k^2}{2}+k/2}$$

Exercício

$$= \frac{2^{1+k/2}}{k!} < 1 .$$

Logo, existe uma 2-coloração de $K_n$ sem clique de tamanho $k$ monocromática. $\square$

Um hipergrafo $\mathcal{H}$ é um par $(V, E)$, onde $V$ é um conj. finito de elementos chamados vértices e $E$ é uma família de subconjuntos ñ vazios de $V$ chamados hiperarestas.




- Um hipergrafo é $k$-uniforme se cada hiperaresta tem $k$ vértices.
  - ⇒ Note que um grafo é um hipergrafo 2-uniforme.

- Um hipergrafo $\mathcal{H}$ é bicolorível se for possível colorir os vértices de $\mathcal{H}$ com duas cores de forma que nenhuma aresta de $\mathcal{H}$ seja monocromática

Teo. (Erdős, 63) Seja $\mathcal{H}$ um hipergrafo $k$-uniforme com $m$ arestas. Se $m < 2^{k-1}$, então $\mathcal{H}$ é bicolorível.

Demonstração

- Pinte cada vértice de $\mathcal{H}$ de azul ou vermelho de forma aleatória e independente com probabilidade $1/2$.
- probabilidade da hiperaresta ser monocromática: $2^{-k+1}$
- Para cada $e \in E(\mathcal{H})$, seja $A_e$ o evento da aresta $e$ ser monocromática
- $\mathbb{P}(\mathcal{H}$ ter aresta monocromática$) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{e \in E(\mathcal{H})} A_e\right) \leq \sum_{e \in E(\mathcal{H})} \mathbb{P}(A_e)$

- $\mathbb{P}(\mathcal{H} \text{ ter aresta monocromática}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{e \in E(\mathcal{H})} A_e\right) \leq \sum_{e \in E(\mathcal{H})} \mathbb{P}(A_e)$

$$= \frac{m}{2^{k-1}}$$

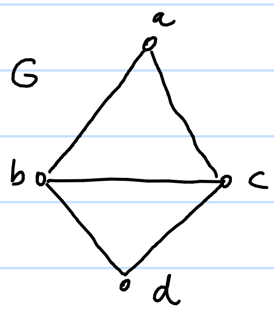
- Se $m < 2^{k-1} \Rightarrow \frac{m}{2^{k-1}} < 1$

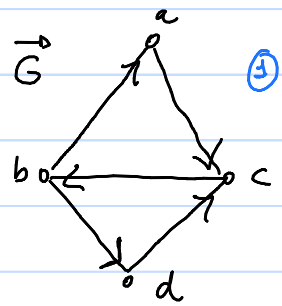
- $\mathbb{P}(\mathcal{H} \text{ ser bicolorido}) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{H} \text{ ter aresta monocromática}) > 0$

$\square$

- Dado um grafo $G$, uma <u>orientação</u> de $G$ é a atribuição de uma direção às arestas de $G$, i.e., cada aresta $\{u,v\} \in E(G)$ passa a ser vista ou como o par ordenado $(u,v)$ ou como o par $(v,u)$.
  - O desenho de uma orientação de um grafo é semelhante ao desenho de um grafo, com exceção do fato de usarmos um segmento de reta orientado $x \longrightarrow y$ para representarmos o par ordenado $(x,y)$.

EX:



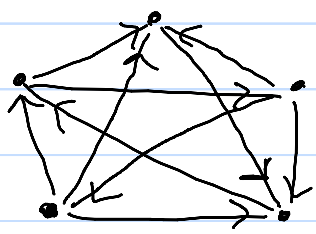




① $\vec{G}$ é uma orientação de $G$

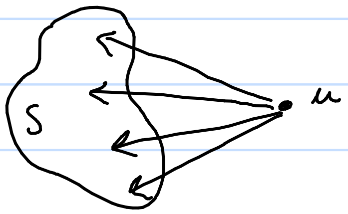
② note como a aresta $\{d,c\} \in E(G)$ passou a ser vista como o par ordenado $(d,c)$.

- Um <u>torneio</u> é uma orientação do grafo completo

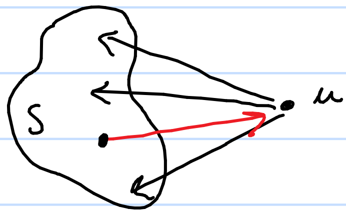
EX:



- Dado um conj. $S \subseteq V(T)$ e um vértice $u \in V(T)\setminus S$, escrevemos $u \to S$ se $(u,v) \in E(T)$ para todo $v \in S$. Caso contrário, escrevemos $u \not\to S$.




$u \to S$




$u \not\to S$

- Um torneio $T_k$ tem a propriedade $T_k$ se para todo conj $S \subseteq V(T)$ de tamanho $k$, existe $u \in V(T)\setminus S$ tal que $u \to S$.

Teorema 5.2.3 Se $\cancel{n \geq k^2 2^{k+1}}$ $\frac{n}{\ln n} > 2^k \cdot k$ e $n \geq k+1$, então existe um torneio $T$ com $n$ vértices que tem a propriedade $T_k$.

Demonstração

- Considere um torneio aleatório $T$ com $n$ vértices, i.e., para cada vértice $\{u,v\}$, escolhemos de forma independente e uniformemente ao acaso um entre $(u,v)$ e $(v,u)$ para ser aresta de $T$.
- Seja $S \subseteq V(T)$ t.q. $|S| = k$ e seja $u \in V(T)\setminus S$.
- Note que p/ todo $u \in V(T)\setminus S$

$$\mathbb{P}(u \to S) = 2^{-k}$$

- Seja $A_S$ o evento "para todo $u \in V(T)\setminus S$, temos $u \not\to S$"

$$\mathbb{P}(A_S) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{u \in V(T)\setminus S} \{u \not\to S\}\Big) = \prod_{u \in V(T)\setminus S} \mathbb{P}(u \not\to S) = (1-2^{-k})^{n-k}$$

pois os eventos $\{u \not\to S\}$ são mutuamente independentes.

- $$\mathbb{P}(T \text{ não ter propriedade } T_k) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{\substack{S \subseteq V(T)\\ |S|=k}} A_S\Big) \leq \sum_{\substack{S \subseteq V(T)\\ |S|=k}} \mathbb{P}(A_S)$$

$$= \binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k}\left(1-2^{-k}\right)^{n-k} \leq \frac{n^k}{k!}\left(1-2^{-k}\right)^{n-k}$$

$$\leq \frac{n^k}{k!}\left(e^{-2^{-k}}\right)^{n-k}$$

$$\leq \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{n-k}{2^k}}$$

$$\leq n^k e^{-n/2^k} \cdot \frac{e^{k/2^k}}{k!} \leq 1 \quad *$$

$$\leq n^k \cdot e^{-n/2^k}$$

$$* \quad e^{k/2^k} \leq e^{1/2}$$

$$\frac{k}{2^k} \leq \frac{1}{2} \iff k \leq \frac{2^k}{2} \iff k \leq 2^{k-1}$$